

# EL USO DE MATERIALES EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA ESCOLAR (1925-1936)<sup>1</sup>

Dolores CARRILLO GALLEGO y Encarna SÁNCHEZ JIMÉNEZ  
Universidad de Murcia

## 1. Introducción

El movimiento de la Escuela Nueva, de la primera mitad del siglo XX, propugnaba una organización de las escuelas que permitiera a los niños «aprender haciendo». Las diferentes propuestas que se realizaron y las experiencias que se llevaron a cabo planteaban metodologías diferentes pero que, todas ellas, apelaban a la actividad del niño y a la propuesta de actividades y proyectos de acuerdo con los intereses del alumnado. Y para ello se necesita poner a su alcance materiales de enseñanza que permitan esa construcción del conocimiento.

Es un momento de gran creatividad en cuanto a propuestas de materiales didácticos. En el caso de las matemáticas, ¿qué función se le asignaba al uso de materiales?, ¿qué tipos de materiales se recomendaban?, ¿cómo se usaban? Este trabajo pretende dar elementos de respuesta a estas cuestiones, desde la perspectiva de profesores de Escuelas Normales relacionados por los presupuestos de la Escuela Nueva.

Entre las obras que permiten estudiar este tipo de cuestiones están las de Aurelio R. Charentón, Margarita Comas y José María Eyaralar, todos ellos profesores de Escuelas Normales y antiguos y destacados alumnos de la Escuela Superior del Magisterio<sup>2</sup>. Los tres viajaron a Europa becados

---

1 Este trabajo se ha llevado a cabo gracias a la ayuda concedida por la Fundación Séneca -Agencia de ciencia y Tecnología de la Región de Murcia-, en el marco del II PCTRM 2007-2010, dentro del proyecto de investigación n.º 11903/PHCS/09, sobre «El patrimonio histórico-educativo de la Región de Murcia. La memoria de los docentes».

2 Comas fue la número uno de la promoción de 1915, Eyaralar lo fue de la promoción de 1918 y Charentón de la de 1924. MOLERO, ANTONIO y DEL POZO, M.M.: *Escuela de Estudios Superiores del Magisterio (1909-1932)*, Madrid, Departamento de Educación de la Universidad de Alcalá de Henares, 1989.

por la JAE (Eyaralar en 1923 en Francia, para estudiar la metodología de las matemáticas, Comas en el curso 1921-22 en Inglaterra, y Charentón desde finales de 1932 en Francia, Suiza y Bélgica, estos últimos con el objeto de estudiar la metodología de las ciencias físico-naturales)<sup>3</sup>. Además, Charentón dejó la docencia en las Escuelas Normales, entre 1934 y 1937, para ser director de escuelas graduadas.

Las obras en las que se hace una referencia explícita al uso de materiales y que, por ello, nos servirán de referencia fundamental en este trabajo son:

- *Cómo se enseña la Aritmética y la Geometría* (1923)<sup>4</sup> y *Metodología de la Aritmética y la Geometría* (1932), ambos de Margarita Comas.

- *Metodología de la Matemática*, de José M. Eyaralar, publicada en 1933.

- *Lecciones de Cálculo. Aritmética, Geometría, Dibujo y Trabajo manual* (dos obras, *Grado Preparatorio* y *Grado Elemental*), de Aurelio R. Charentón, de los que no consta la fecha de publicación, aunque fue posterior a la concesión de la beca.

Se observa que la edición de dos de ellas es de la Revista de Pedagogía, órgano de expresión en España de la Liga Internacional de Educación Nueva<sup>5</sup>. En esta revista publicaron tanto Margarita Comas como Eyaralar. Además, de la obra *Cómo se enseña la Aritmética y la Geometría*, de Margarita Comas, se hicieron varias ediciones.

Los tres editaron otras obras que utilizaremos ocasionalmente para contrastar o ilustrar las cuestiones planteadas en este trabajo.

Son, por tanto, profesores implicados en la formación de maestros y representativos de las corrientes, que se desarrollaron en esa época, para la renovación metodológica de la escuela primaria. En sus estudios en la Escuela Superior del Magisterio, conocieron el movimiento de la Escuela Nueva pues, como ha señalado M.<sup>a</sup> del Mar del Pozo, este centro educativo fue un factor importante en la difusión de las experiencias relacionadas con la Escuela Nueva, y en la transmisión de nuevos modelos docentes a través de sus alumnos, futuros inspectores y profesores de Escuela Normal<sup>6</sup>.

---

3 MARÍN ECED, T.: *Innovadores de la Educación en España*, Cuenca, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Castilla - La Mancha, 1991.

4 La edición consultada en este trabajo es la quinta, de 1932.

5 VIÑAO FRAGO, ANTONIO: «La modernización pedagógica española a través de la 'Revista de Pedagogía' (1922-1936)», *Anales de Pedagogía*, Murcia, 12-13, (1994-95), pp. 7-45.

6 DEL POZO, M. M. (2000): «La renovación pedagógica en España (1900-1939): Etapas, características y movimientos». En CANDEIAS, E. (coord.): *Actas de V Encontro Ibérico de História da Educação. Renovação Pedagógica. Renovación Pedagógica*, Coimbra - Castelo Branco, Alma Azul, pp. 115-159.

En el análisis de manuales interesa considerar dos puntos de vista complementarios<sup>7</sup>. Por un lado, un análisis ‘ecológico’ que tiene en cuenta la institución en la que se realizan los aprendizajes (en este caso la escuela primaria) y trata de determinar el ‘nicho ecológico’ de aspectos relacionados con el proceso de estudio de las matemáticas en esa institución, manifestado en posibilidades y límites de dicho proceso de estudio.

El análisis ecológico debe tener en cuenta que el periodo considerado, el momento en el que se editaron las obras consultadas, fue un tiempo de cambios, inspirados en los principios de la Escuela Nueva, que afectaban al sistema educativo y, en particular, a la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria y a las Escuelas Normales, que estaban realizando un proceso de cambio en sus planes de estudio.

Por otro lado, un análisis ‘praxeológico’<sup>8</sup>, que permite responder a cuestiones como: ¿cuáles son las técnicas empleadas al usar los materiales?, ¿a qué tipo de tareas van asociadas?, ¿qué elecciones se han hecho, en los casos en los que las justificaciones se explicitan?

## 2. La enseñanza de la matemática

Para los autores que estamos considerando, la enseñanza de la matemática en la escuela primaria ha de combinar dos fines o aspectos, no opuestos sino complementarios, el educativo o de formación y el práctico<sup>9</sup>. Para ello, propugnan una metodología activa, en consonancia con los principios de la Escuela Nueva; insisten en que en la enseñanza de la matemática, en todos sus aspectos, apele a la intuición del alumno, y en casi todas las obras que escribieron se refieren a ella.

7 CHAACHOUA, Hamid y COMITI, Claude: «L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique», en BRONNER, A. et al. (ed.): *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*. IUFM de l'Académie de Montpellier, 2010, pp. 771-789.

8 El análisis praxeológico y las nociones relacionadas pertenecen a un marco teórico enmarcado en el Enfoque Epistemológico en Didáctica de las Matemáticas, la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD), según la cual el trabajo matemático conlleva estudiar tipos de problemas, así como las técnicas usadas para abordarlos y el discurso razonado que justifica las técnicas y establece bajo qué condiciones pueden aplicarse. Postula que toda actividad matemática institucional puede modelizarse mediante la noción de ‘praxeología’ u ‘organización matemática’, que está compuesta por cuatro elementos: tipos de tareas, técnicas matemáticas, elementos tecnológicos y elementos teóricos. Praxeología hace referencia a la existencia de dos componentes en la actividad matemática típica: la praxis, que incluye las tareas y las técnicas y el logos, que comprende las tecnologías y las teorías, las cuales permiten justificar y entender lo que se hace, formando el discurso razonado sobre la práctica.

9 COMAS, Margarita: *Cómo se enseña la aritmética y la geometría*, Madrid, Publicaciones de la Revista de Pedagogía, 5.ª ed., 1932, p. 5. EYARALAR, José María: *Metodología de la Matemática*, Madrid, Editorial Reus, 1933, pp. 1-2.

Para hacer la enseñanza activa, hacen hincapié en dar «todo el margen posible a [la] actividad sensorial y manual»<sup>10</sup>, y en la importancia de la actividad manual, «comprendida entre el juego y el trabajo manual»<sup>11</sup>. Para conseguir que los aprendizajes sean realmente funcionales, la matemática debe ir asociada con la vida y, en particular, con las otras ciencias y con los trabajos manuales<sup>12</sup>.

Margarita Comas establece tres fases en la evolución del pensamiento en las ciencias: experimental, intuitiva y racional. En cuanto a la matemática, «La aritmética y la geometría empiezan, pues, por ser, como la física o la historia natural, materias experimentales y de observación, desligándose después poco a poco del material concreto, y, por, fin, del recuerdo sensible de éste, para llegar, en los grados superiores de la enseñanza, a la pura abstracción»<sup>13</sup>. Propone comenzar por la manipulación de objetos reales, que después pasarán a ser figurativos, sustituirlos después por los dibujos o representaciones gráficas de los objetos, luego por las imágenes mentales de los objetos o de sus representaciones y, por último, llegar al pensamiento abstracto. Es algo similar a los tipos de intuición a los que se refiere Eyaralar, real, figurada y representativa, a las que asocia una manera de representar los objetos matemáticos: objetos, dibujos y representaciones geométricas – esquemáticas- de cantidades, respectivamente<sup>14</sup>.

No obstante, y a pesar de la apuesta decidida por el uso de materiales y recursos concretos para la enseñanza de la matemática, son conscientes de que su estudio debe ir más allá y no quedarse en la mera experimentación. Así, se afirma: «No se prescindirá del elemento intuitivo en ningún grado de la enseñanza primaria, aunque vaya disminuyendo poco a poco la intensidad con que se use»<sup>15</sup>. Eyaralar es aún más explícito: «no deben mantenerse demasiado tiempo las representaciones sensoriales unidas a las verbales, cuando éstas deban utilizarse para el pensar lógico. Es decir, que debemos guardarnos de un exceso de intuicionismo»<sup>16</sup>. Y lo concreta: «nótese que esta gradación sucesiva ha de seguirse en la enseñanza hasta hacer innecesario todo el andamiaje intuitivo de sus primeros grados»<sup>17</sup>.

---

10 CHARENTÓN, Aurelio R.: *Lecciones de cálculo. Grado preparatorio. Aritmética, Geometría, Dibujo y Trabajo manual*, Madrid, Editorial estudio de Juan Ortiz, s.f., p. 8.

11 EYARALAR, José María: *Metodología...*, op. cit., p. 198.

12 *Ib.*, p. 190.

13 COMAS, Margarita: *Metodología de la aritmética y la geometría*, Madrid, Publicaciones de la Revista de Pedagogía, 1932, p. 7.

14 EYARALAR, José María: *Didáctica de los problemas de aritmética y geometría*, Guadalajara, Editorial Sardá, 1936, p. 17.

15 COMAS, Margarita: *Cómo se...*, op. cit., p. 6.

16 EYARALAR, José María: *Metodología...*, op. cit., p. 224.

17 *Ib.*, pp. 202-203.

### 3. El material para aprender matemáticas

En consonancia con la consideración de la matemática como una ciencia experimental, al menos en los primeros grados de la enseñanza, y con la importancia que conceden a la intuición, todos los autores considerados proponen el uso de materiales concretos para el aprendizaje de esta disciplina. Al hablar de intuición no se refieren sólo a la intuición visual, pues creen que ha de ir acompañada de otras intuiciones, como las sensoriales; por tanto, las acciones concretas con los materiales han de ser efectuadas por los propios niños, que no han de observar simplemente cómo el maestro las ejecuta, es decir, «hacer no es sólo ver»<sup>18</sup>.

#### 3.1. Funciones del material

Las funciones que asignan al uso de materiales son varias, entre las que destacamos las siguientes:

- Comprobar intuitivamente una propiedad. Puede ser antes de demostrarla o, simplemente, para aclararla una vez demostrada:

empezar por una demostración clásica del valor de los ángulos de un triángulo o del teorema de Pitágoras, es un absurdo, aun para los alumnos del bachillerato, si antes no se han comprobado experimentalmente estas verdades mediante triángulos recortados de papel o algún procedimiento intuitivo parecido, pues que los hombres han necesitado siglos para pasar de un estadio al otro.<sup>19</sup>

- Descubrir propiedades o deducir reglas. Por ejemplo, en aritmética, formación de haces de palillos, cajas con bolas, montones de cubos o de fichas para descubrir las propiedades de los números y las reglas operatorias; en geometría, la construcción de polígonos articulados pone de manifiesto que el triángulo es el único rígido<sup>20</sup> y, en general, la construcción de polígonos lleva a tener que plantearse algunas de sus propiedades.

- Definir más exactamente. En este sentido, Eyaralar distingue dos tipos de definiciones, *descriptivas*, enunciando las propiedades, tal como se hace en las ciencias experimentales, y las *generativas*, expresando cómo se engendra lo definido, ambas complementarias. Cita como ejemplo el caso de la construcción de la circunferencia usando una cuerda (fijando un extremo y desplazando el otro manteniendo la cuerda tensa), que permite llegar a la definición de la circunferencia como lugar geométrico de los puntos que equidistan de uno fijo<sup>21</sup>.

18 COMAS, Margarita: *Metodología...*, op. cit., p. 8.

19 *Ib.*, p. 8.

20 COMAS, Margarita: *Cómo...*, op. cit., p. 27; EYARALAR, José María: *Nuevo Tratado de Geometría*, Madrid, Editorial Reus, 1924, p. 87.

21 EYARALAR, José María: *Metodología...*, op. cit., pp. 66-67.

En las definiciones basadas en la observación o en las acciones con materiales, se hace necesario diferenciar entre objetos ‘reales’ o sus representaciones, y objetos ‘abstractos’ o definiciones, y por ello los autores considerados insisten en la necesidad de ir afinando los conceptos. Ejemplos de estos procesos los describen Comas<sup>22</sup> en el análisis de líneas y Charentón, al definir el ángulo recto<sup>23</sup>

▪ Relacionar la geometría con la aritmética o el álgebra. Comas, en *Metodología de la aritmética y la geometría*, propone obtener diferentes fracciones y las relaciones entre ellas mediante divisiones, por plegado, de una cuartilla. Eyaralar nos dice que «La Aritmética y la Geometría deben ir íntimamente unidas en la enseñanza primaria [...] La Geometría puede hacer prácticas e intuitivas propiedades y operaciones aritméticas»<sup>24</sup>. Así, la construcción de rectángulos de 3 x 4 y de 4 x 3 cuadrados, permite poner de manifiesto la propiedad conmutativa de la multiplicación.

Junto a estos, señalan otros fines, como la relación entre las matemáticas y otras disciplinas, geografía, física, dibujo, etc.

### 3.2. Relación con el dibujo y con el trabajo manual

El carácter global e indiferenciado que Charentón atribuye a la experiencia matemática del niño, hace que proponga el dibujo y el trabajo manual «no como disciplinas autónomas, sino como métodos de trabajo e instrumentos para hacer activa la enseñanza del cálculo»<sup>25</sup>. Sus *Lecciones de Cálculo* llevan por subtítulo *Aritmética, Geometría, Dibujo y Trabajo Manual*, y en la Justificación al Grado Elemental, se queja de que la escuela haga aparecer estas disciplinas por separado:

¿Qué razón hay para mantener este criterio tan opuesto a la vida mental del niño y aun a la misma vida real, que al privar a una disciplina del apoyo de las otras construye el andamiaje matemático de nuestro alumno con una mayor fragilidad y de un modo más artificioso?

No encontrando esta razón y creyendo, por el contrario, lógico y natural el proceso que el niño sigue espontáneamente, hemos discurrido el presente libro, en el que los números y las formas se ofrecen a la par y en el que el dibujo y el trabajo manual se ponen al servicio del cálculo para vivificarlo y darle una expresión material y concreta.<sup>26</sup>

22 COMAS, Margarita: *Metodología...*, op. cit., pp. 53-55.

23 CHARENTÓN, Aurelio R.: *Lecciones... Grado elemental*, op. cit., pp. 84-85.

24 EYARALAR, José María: *Metodología...*, op. cit., p. 230.

25 CHARENTÓN, Aurelio R.: *Lecciones de cálculo. Grado preparatorio...*, op. cit., p. 8.

26 CHARENTÓN, Aurelio R.: *Lecciones de cálculo. Grado elemental. Aritmética, Geometría, Dibujo y Trabajo manual*, Madrid, Editorial estudio de Juan Ortiz, s.f., p. 8.

En todas las lecciones de geometría, tras la introducción de cada figura geométrica a partir de la observación y de la experimentación con objetos, generalmente del entorno, hay apartados diferenciados con actividades de dibujo y, a continuación, de trabajo manual.

Eyaralar, por su parte, considera que «el dibujo constituye la expresión de lo percibido y asimilado»<sup>27</sup>. Al igual que a Comas, las construcciones manuales le sirven también como pretexto para hacer dibujos o croquis a escala. Y aconseja terminar el trabajo manual con una actividad de dibujo.

El trabajo manual va ligado sobre todo a los problemas de geometría, que para Eyaralar «ejercitan la actividad manual, tan grata al niño, con las construcciones; educando a un tiempo la vista, la mano y aun el gusto estético»<sup>28</sup>. Precisamente critica que en el Instituto-Escuela la geometría no se relacione con el trabajo manual<sup>29</sup>. Insiste en que a cada lección geométrica le sigan problemas de ornamentación, aspecto en el que coincide con Charentón, que incluye gran cantidad de este tipo de actividades en sus lecciones, tanto de dibujo como de trabajo manual.

### 3.3. Condiciones que ha de reunir el material

Estos profesores de Escuela Normal, conocedores de la realidad de otros países que habían visitado mientras disfrutaban de la beca concedida por la JAE, y conscientes de las condiciones de las escuelas españolas, insisten en el bajo coste del material: «la enseñanza intuitiva de la matemática no exige gastos ni aparatos especiales. Apenas una o dos de las cosas citadas (...) dejan de ser cosa vulgar y de uso corriente, y aun éstas pueden ser sustituidas caso de no ser fácil proporcionárselas el maestro»<sup>30</sup>. Apelan a la inventiva del maestro para reemplazar, en caso necesario, unos objetos o materiales por otros básicos o elaborados a partir de ellos: hilo, arena, papel, cartón, tijeras, encuadernadores..., y para utilizar un mismo material de diversas maneras o con distintos fines.

De hecho, creen que el material no debe ser sofisticado, para que los niños no centren su atención en él, desviándola de los aspectos matemáticos: «Cuanto más sencillo y más conocido es el material empleado menos distraen los niños su atención en las complicaciones de la cosa, olvidándose de la verdad esencial que quiere el maestro deducir»<sup>31</sup>. Para los problemas geométricos realizados realmente sobre el terreno, Eyaralar reconoce el material de campo costoso para las escuelas españolas, y el construido por los alumnos, deficiente

27 EYARALAR, José María: *Metodología...*, op. cit., p. 234.

28 EYARALAR, José María: *Didáctica...*, op. cit., p. 85.

29 EYARALAR, J.M.: *Metodología...*, op. cit., pp. 304-305.

30 COMAS, M.: *Cómo se enseña...*, op. cit., p. 28.

31 *Ib.*, p. 35.

en cuanto a la exactitud de los resultados; sugiere disponer de cuerdas, cinta métrica y cartabón o escuadra, con un pequeño nivel y una plomada<sup>32</sup>. Este mismo autor relata algunas condiciones que ha de reunir el material: que sea sólido, agradable, manejable por su tamaño, y que permita la actuación sobre él, frente a la mera visualización. Además de ser auto-correctivo y auto-instructivo<sup>33</sup>.

#### 4. Materiales y orientaciones sobre su utilización

##### 4.1. Tipo y procedencia del material

En las obras consultadas hallamos referencias a diversos tipos de materiales:

En geometría, compás, escuadra, cartabón, papel, papel cuadriculado, cartón, encuadernadores, alambre, cuerda, nivel, polígonos y cubos de madera, etc.

En aritmética, material discreto (bolas, monedas, botones); material agrupado (tablas con 10 botones, varillas con 10 bolas; monedas); ábaco, fichas de dominó, etc.

Para la medida<sup>34</sup>, cuerdas, pesas, medidas de capacidad habituales, monedas, hojas de periódico, el suelo de la clase, alfileres e hilo, cinta métrica, balanza, pesas, probeta graduada, reloj con manecillas movibles, etc.

Las propuestas de materiales están influidas por la experiencia que habían vivido en su estancia en Europa, becados por la JAE y las obras de otros autores, españoles y extranjeros, pero también por el conocimiento de la realidad de las escuelas españolas y de las propias familias y de su precariedad de medios económicos. La pertinencia de las orientaciones que dan para su uso revela la buena formación matemática y didáctica de los autores.

Podemos agrupar los materiales, según su origen, en<sup>35</sup>:

- Materiales didácticos ‘clásicos’, de matemáticas o de otras disciplinas, o comercializados: ábacos, polígonos recortados en madera, sólidos geométricos, mapas... También se citan materiales comercializados, como los de la casa Nathan.
- Instrumentos de dibujo. En general abogan por no limitar tampoco el uso de instrumentos a los más clásicos; Eyaralar critica que muchas veces los

32 EYARALAR, J.M.: *Didáctica...*, op. cit., p. 114.

33 EYARALAR, J.M.: *Metodología...*, op. cit., p. 215.

34 Aunque los autores tratan la aritmética y la geometría, sin distinguir por separado las cuestiones de medida, aquí sí hemos diferenciado los materiales relacionados con la medida.

35 Una clasificación del tipo de materiales que propone uno de los autores, aparece recogida en nuestro trabajo anterior, CARRILLO, Dolores y SÁNCHEZ, Encarna: «Aprender matemáticas jugando: la propuesta educativa de Eyaralar», en ESCOLANO, Agustín (ed.): *La cultura material de la escuela. En el centenario de la Junta para la Ampliación de Estudios, 1907-2007*, Berlanga de Duero, CEINCE, 2007, pp. 183-194.

instrumentos geométricos se limiten incluso aún más, a la regla y el compás únicamente, cuando «en la Didáctica de esta ciencia en las clases elementales, hemos de suprimir toda clase de limitaciones»<sup>36</sup>. Propone usar también la escuadra, el semicírculo graduado para transportar ángulos, el pantógrafo...

- Material de los diferentes oficios y artes: plomadas, niveles, instrumentos de agrimensor, balanzas, probetas graduadas, facturas, pagarés, depósitos... Además de su valor formativo, estos materiales permiten conectar las matemáticas con la vida diaria, que es uno de los objetivos que señalan para las matemáticas en primaria.

- Objetos o materiales de uso común, generalmente obtenidos del entorno y de los juegos clásicos, tales como cajas y envases de diversos productos, libros, abanicos, espejos, fichas de dominó, juego de bolos, monedas, palillos, espejos, postales, retratos, cartones con botones o con alfileres, de los que hay en las mercerías, etc. Aquí entrarían los materiales básicos, a partir de los que ir elaborando otros materiales o instrumentos: papel, cartón, botones, encuadernadores, cuerdas o hilo bramante, alfileres, alambre, cuentas, tijeras, recipientes, arena...

A continuación recogemos ejemplos propuestos por Charentón sobre la representación de las decenas (figura 1) y su suma (figura 2), ambos realizados con botones, y el ‘contador’, hecho con encuadernadores (figura 3):

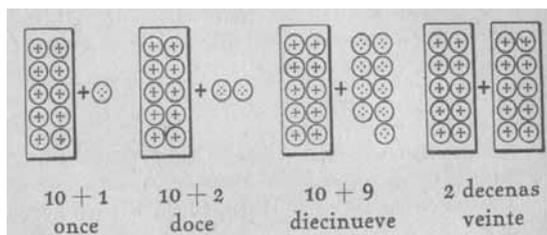


Figura 1<sup>37</sup>

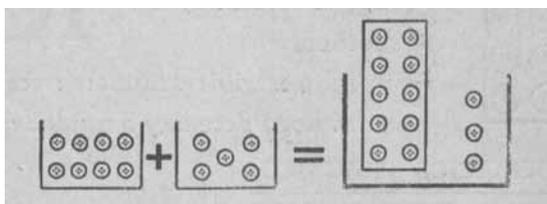
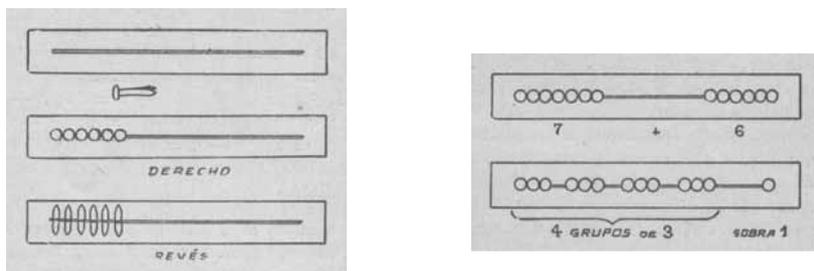


Figura 2<sup>38</sup>

36 EYARALAR, José María: *Didáctica...*, op. cit., p. 103.

37 CHARENTÓN, Aurelio R.: *Lecciones...* Grado elemental..., op. cit., p. 28.

38 CHARENTÓN, Aurelio R.: *Lecciones...* Grado preparatorio..., op. cit., p. 110.

Figura 3<sup>39</sup>

▪ Materiales didácticos recogidos en obras de otros autores y de sus visitas a centros educativos. Es el caso de los citados del Instituto-Escuela; de los materiales observados por Eyaralar durante su estancia en Francia<sup>40</sup>, los Winnetka o Mackinder, junto con los de Fröebel, Decroly y Montessori, que citan tanto Comas como Eyaralar.

Prueba de las influencias que estos autores tuvieron de las corrientes y las instituciones de su época es la coincidencia en señalar materiales; tanto Eyaralar como Comas recogen en sus obras la relación de material que Sánchez Pérez, catedrático de instituto, propone para la sección primera del Instituto-Escuela:

Una caja con 500 a 1000 conchas de mar; una caja con 500 a 1000 piedrecitas de río; una caja con semillas duras (judías, algarrobas, guijas, habas, etc.); mil centímetros cúbicos sueltos, de madera, en una caja cúbica; una colección de varillas de hierro de tres tamaños distintos (ciento de cada uno); una colección de figuras recortadas de madera; una colección de soldaditos de plomo; una colección de monedas; treinta tableros con orificios a un centímetro de distancia; dos metros graduados en centímetros (uno rígido y otro plegable); un litro; un decilitro.<sup>41</sup>

▪ Materiales didácticos de diseño propio o adaptado por los autores. Como ejemplo, podemos citar las 'reglas superpuestas', que Eyaralar describió en un artículo publicado en la *Revista de Pedagogía*<sup>42</sup> en 1926, y que formó parte de la exposición de material de matemáticas que organizó en la Escuela Normal de Barcelona siendo profesor de matemáticas de la misma. Otro ejemplo, el material que él mismo denominó Arquímedes, en honor

39 Ib., p. 111.

40 EYARALAR, José María: «La enseñanza de las Matemáticas en las escuelas francesas», *Anales de la JAE*, XIX, (1924), pp. 1-96.

41 COMAS, Margarita: *Cómo se...*; op. cit., pp. 27-28. También en EYARALAR, José María: *Metodología...*, op. cit., pp. 287-288.

42 EYARALAR, José María: «La educación intelectual y la enseñanza de las matemáticas», *Revista de Pedagogía*, tomo V, 1926, pp. 7-13, cita en p. 10.

de este matemático, y el material EYA, diseñado fundamentalmente para cálculo de áreas y volúmenes:

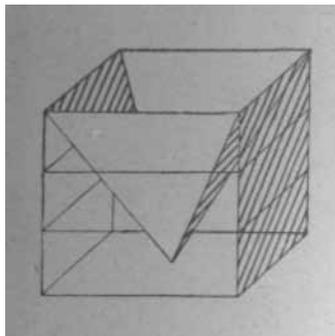


Figura 4<sup>43</sup>

El disco EYA, permite la división de la circunferencia en partes iguales y la construcción de polígonos regulares:

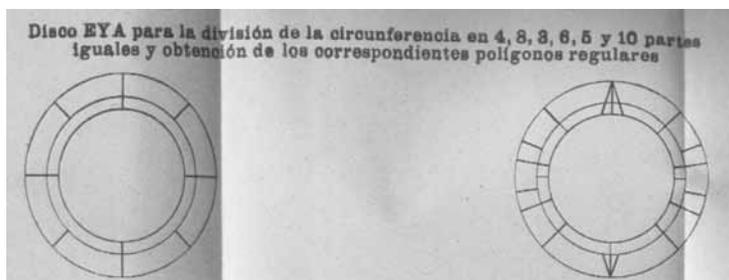


Figura 5<sup>44</sup>

No clasificamos el material por su uso puesto que, como expresa Eyaralar, «un mismo material puede ser utilizado para diferentes cuestiones (...), ya que aquél [su valor] depende de éste [su empleo] y el uso puede ser ampliado y modificado por el ingenio del maestro y las necesidades de la clase»<sup>45</sup>.

Independientemente del tipo de material, proponen que se construyan, siempre que se presten a ello, en la propia escuela, recogiendo la propuesta de Cossío, en su famosa conferencia sobre *el maestro, la escuela y el material de enseñanza*:

No es lo que importa que el material sea poco o mucho, pobre o rico, grande o pequeño: lo que interesa es que sea adecuado (...) y *por adecuado*,

43 EYARALAR, José María: *Metodología...*, op. cit., lámina.

44 *Ibíd.*

45 *Ib.*, pp. 215-216.

en este respecto, entiendo *vivo*; y vivo quiere decir por lo que hace a la escuela primaria, fabricado en ella, como obra del trabajo común de maestro y discípulo<sup>46</sup>.

#### 4.2. Tareas y técnicas que implican el uso de materiales

Los materiales de enseñanza son «huellas del pasado que nos informan de la intrahistoria de los procesos educativos, las prácticas, las metodologías de enseñanza, la organización de las escuelas, las relaciones entre los alumnos, los docentes...»<sup>47</sup>. Para ello, hay que tener en cuenta las tareas que se abordaban con ellos y las técnicas empleadas en su resolución.

Consideramos una tarea de geometría, a modo de ejemplo, y vemos qué técnicas se proponen para realizarla, y el papel del material en ellas. Hemos elegido la tarea de hacer un cuadrado y las tareas relacionadas con ella, como la construcción de un cubo, y la de un ángulo recto.

Hay que señalar que todos los autores coinciden en introducir el cuadrado a partir del cubo. Eyaralar se refiere a la conveniencia de comenzar por la geometría plana, por la espacial o por ambas:

En Geometría cabe discrepancia en el punto de partida, si éste ha de ser de lo real, esto es, de los sólidos en el espacio, para descender a los elementos planos, o ha de partirse de lo sencillo, que es el punto y la recta, para ir a lo complejo. Un criterio armónico es el mejor, empezando, en efecto, por el conocimiento de los sólidos: esfera, cilindro y cubo, como quería Fröebel para pasar en seguida al plano y continuar en él, si bien no con el rigor clásico, sino que en cada grado puede estudiarse la parte plana y la parte espacial; así, por ejemplo, el estudio del cubo (...) puede hacerse incluso al final del primer grado, antes que los polígonos en general.<sup>48</sup>

Margarita Comas propone la secuencia siguiente<sup>49</sup>, para primero y segundo grado (las técnicas se han resaltado en cursiva):

- *Observar* un objeto con forma de cubo e imitarlo (*reproducirlo*) en *plastilina* o *barro*.

46 Cossío, Manuel Bartolomé: «El maestro, la escuela y el material de enseñanza», en Cossío, Manuel Bartolomé: *El maestro, la escuela y el material de enseñanza y otros escritos*, Madrid, Editorial Biblioteca Nueva, 2007, (edición y estudio introductorio de Eugenio Otero Urtaza), pp. 53-81, cita en p. 19.

47 MORENO, Pedro Luis: «Rosa Sensat, la cultura material de la escuela y el material de enseñanza», *Temps d'Educació*, Barcelona, (2012), en prensa.

48 EYARALAR, José María: *Metodología...*, op. cit., pp. 178-179.

49 COMAS, M.: *Metodología...*, op. cit., pp. 44-47. Se ha recogido la secuencia completa de la lección, titulada El prisma y elementos derivados en la que se estudia el cubo, el cuadrado y algunas nociones vinculadas a la definición de cuadrado, como la de ángulo recto o la perpendicularidad.

- Propuesta de *construir un cubo en cartón*: contar caras, *medir* las dimensiones de las caras y comprobar que el largo y el ancho coinciden.

- *Proyectar* una cara del cubo sobre papel y *dibujar el contorno*.

- *Recortar* un cuadrado.

- *Dibujar* cuadrados a *partir de uno recortado como plantilla*.

- *Deshacer* el cubo de cartón y reproducir el desarrollo plano, por *calco*, a *partir del cuadrado recortado o midiendo*. Luego construir un cubo a *partir del desarrollo plano*.

- Cuando no sea posible construir el cubo, *usar la plomada para comprobar la verticalidad* de las caras laterales. A partir de ahí, comprobar, buscar y dibujar verticales.).

- *Construcción de cuadrados articulados*. De ahí a la noción de ángulo recto (noción intuitiva), como condición para que la figura sea cuadrada.

- *Dibujo en papel cuadrículado (contando las cuadrículas)*.

- Obtención de cuadrados por *plegado y recortado*.

- (Se introduce el rectángulo).

- Ángulo recto por *plegado* (restricción: no hay papel cuadrículado). *Dibujo. Recortado*.

- Ángulos rectos, agudos y obtusos a partir de *abrir y cerrar* abanicos japoneses, cuadriláteros articulados... Líneas perpendiculares.

Aurelio R. Charentón, para estudiar el cubo, el cuadrado y algunas nociones relacionadas propone, para el grado preparatorio (de nuevo las técnicas se han resaltado en cursiva)<sup>50</sup>:

- *Observar* un objeto con forma de cubo.

- *Proyectar* una cara del cubo sobre papel y *dibujar el contorno*.

- *Comprobar, proyectando cada una de las caras sobre una cara previamente proyectada* en papel, que las seis caras son iguales. Se llaman cuadrados (sin ver las propiedades del cuadrado)

- *Recortar* en papel.

- *Medir* la longitud de los lados y *comparar*. Definición de vértice.

- *Construcción de un ángulo recto por plegado* y comprobar que los del cuadrado son rectos.

---

50 CHARENTÓN, Aurelio R.: *Lecciones... Grado preparatorio*, op. cit., pp. 49-59, 65-69.

- *Buscar* cosas del entorno que sean cuadrados.
- *Construir un cuadrado a partir de una hoja de papel*, y otros a partir de la porción restante.
  - Recortar cuadrados *tomando ese como plantilla*. Hacer mosaicos *componiéndolos a partir de cuadrados recortados* (tablero de damas)
  - *Dibujar del natural, y luego de memoria*, objetos cuadrados
  - Reproducir frisos con cuadrados en diferentes posiciones, incluso superpuestos, *usando plantillas*.
  - Cuando ve el paralelepípedo propone *distinguir* cubos de paralelepípedos (ortoedros) *por el tacto*. Propone comparar –parecidos y diferencias– cubo y paralelepípedo. Ídem. cuadrado y rectángulo.

Para el grado elemental, primero están las figuras planas y después las lecciones correspondientes a los cuerpos geométricos, haciendo hincapié en la medida de superficies, y aparecen nuevas técnicas para construir cuadrados.

Vemos cómo proponen diferentes técnicas, a veces con un mismo material, y también cómo el material a veces supone una restricción que impide o dificulta el uso de algunas técnicas, y en cambio favorece el empleo de otras, determinando de este modo el conocimiento matemático que los alumnos pueden llegar a construir. Por ejemplo, en el papel cuadrado ya están marcados los ángulos rectos y para dibujar el cuadrado hay que centrarse en que la longitud de los lados sea la misma, contando cuadrados. Pero para la tarea de construir un ángulo recto, Margarita Comas no proporciona papel cuadrado, imponiendo así una restricción, que lleva a introducir una nueva técnica: doblar un papel y volverlo a plegar sobre el doblez. Previamente, la construcción de cuadrados articulados, usando el material consistente en tiras de cartón y encuadernadores, al estilo de un mecano, fuerza, al ser la figura así construida deformable, a tener que considerar cómo han de ser los ángulos para que el polígono resultante sea un cuadrado.

En otra obra<sup>51</sup>, Comas propone construir un cuadrado por *plegado* de una cuartilla; comprobar la igualdad de los lados y la de los ángulos de un cuadrado *girando* un cuadrado de papel; comprobar la igualdad de ángulos *superponiendo* el de la escuadra. Eyaralar, para tratar de «hacer intuitivas las propiedades del cuadrado», también plantea girar dos cuadrados iguales construidos en papel transparente, alrededor de un alfiler clavado en su centro, para ver<sup>52</sup> que coinciden los lados, las diagonales y las semidiagonales. De

51 COMAS, Margarita: *Cómo se enseña...*, op. cit., pp. 31-32.

52 EYARALAR, José María: *Metodología...*, op. cit., p. 205. El autor destaca este verbo en cursiva.

nuevo se observa la influencia del material elegido y de la técnica empleada, en las propiedades matemáticas involucradas. Así, imponer la construcción de un cuadrado por la técnica del plegado, usando como material un trozo de papel de forma rectangular, lleva a considerar la propiedad de que los lados del cuadrado son iguales; la acción de girar un cuadrado sobre sí mismo y que coincida alude a la regularidad de la figura; por último, la técnica de comprobar la igualdad de ángulos con la escuadra responde a la definición de figuras, en este caso ángulos, iguales, como aquellas que son congruentes, es decir, que superpuestas coinciden.

Charentón nos ofrece otra muestra del efecto del material sobre el tipo de conocimientos involucrados, cuando propone, en el grado elemental, construir un cuadrado usando cuatro lápices, pero la construcción del cuadrado con este material –que hace que los lados ya vengan dados iguales pero obliga en cambio a colocarlos de manera que los ángulos sean rectos- no aparece sin embargo en el grado anterior, con niños más pequeños. También añade, en el caso del grado elemental, algunas otras técnicas, como las de trazar un cuadrado a partir de dos rectas perpendiculares, tomando distancias iguales, o uniendo los puntos medios de lados opuestos –o contiguos- en un cuadrado. Estas técnicas van asociadas a propiedades del objeto matemático estudiado, como la igualdad y la perpendicularidad de las diagonales o las simetrías del cuadrado, respectivamente.

El uso de materiales va ligado también al estudio de la relación entre diferentes figuras e incluso desempeña un papel importante en la validación de propiedades, aspecto este que hay que destacar por ser característico del trabajo matemático<sup>53</sup>. Son los casos en los que se solicita la justificación de la técnica empleada con el material, por ejemplo, para la obtención de la figura que se pretende construir: «¿Qué propiedades han de tener los lados mayores para que, doblando la hoja [de papel], se obtenga un cuadrado?»<sup>54</sup>. Entre los ejercicios que figuran al final del tema dedicado a los polígonos, destacamos el siguiente: «Si se toma una hoja de papel y se dobla por un vértice, de modo que dos lados consecutivos se superpongan, separando la parte de la hoja que queda sin cubrir, se obtiene un cuadrado. ¿Por qué?»<sup>55</sup>.

Para los autores analizados, expertos en la enseñanza de la matemática, al decidir qué tipo de material interesa utilizar y cómo, es el trabajo matemático lo que consideran, y no otros factores. Tal y como leemos en

53 Las propuestas de Eyaralar en relación con la validación han sido estudiadas en un trabajo anterior: CARRILLO, Dolores y SÁNCHEZ, Encarna: «La validación en la formación de maestros: José María Eyaralar». En: BOSCH, Marianna y otros: *Un panorama de la TAD*, Bellaterra (Barcelona), Centre de Recerca Matemàtica, 2011, pp. 283-298.

54 EYARALAR, José María: *Nuevo Tratado...*, op. cit., pp. 9-10.

55 *Ib.*, p. 106.

un artículo publicado en la *Revista de Pedagogía*: «estas “manipulaciones” están tan lejos de las “diversiones o recreos matemáticos” como de las “demostraciones” corrientes»<sup>56</sup>.

## 5. Consideraciones finales

Los autores estudiados, recogiendo los principios de la Escuela Nueva, se implicaron en la reforma de los métodos utilizados en las escuelas primarias y, como profesores de Escuela Normal, en la formación de maestros.

Su preocupación por hacer la enseñanza activa e intuitiva está en consonancia con la importancia que dieron al uso de materiales y a la relación de las matemáticas con la vida diaria. Hay una coincidencia fundamental en sus propuestas.

Para ellos, el material de enseñanza no es un ‘fetiche’, ni la solución a todos los problemas del aprendizaje de las matemáticas. Su formación matemática y didáctica les llevó a formular propuestas de uso de los materiales, específicas de los distintos contenidos matemáticos, que favorecen la investigación por el alumnado de cuestiones matemáticas, el descubrimiento de propiedades y la validación de las mismas. En estas propuestas se trasluce, de forma más o menos explícita, las restricciones y límites en el uso de los materiales, de acuerdo con las propiedades que se quieren estudiar.

---

56 VALLS, Vicente: «El método experimental y la enseñanza de las Matemáticas», *Revista de Pedagogía*, Madrid, tomo XII, (1933), pp. 154-158, cita en p. 158.